Devoir de Synthèse N°3
Mathématiques

Lycée secondaire Teboulba — prof : Ghaddab Lassad

Exercice 1 :(*4 points*)

Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit :
4 blanches numérotées :1, 1, 2, 2 et 3 rouges numérotées :1, 1, 1.

1) On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne.
   a – Quelles est la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir deux boules de même couleur »
   B : « obtenir deux boules portant le même numéro »
   b – Calculer : $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$.

2) Une urne U_2 contient 5 boules numérotées : -1, -1, 0, 1, 1.
On tire, au hasard, une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2. On désigne par a le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée de U_2.
A chaque couple (a, b) obtenu on associe le réel $x = a^2 + b^2$.
Calculer la probabilité de chacun des événements :
E_1 : « avoir $x = 2$ » ; E_2 : «avoir $x = 4$ » ; E_3 : « avoir $x = 5$ » ; E_4 : « avoir $x \geq 1$ »

Exercice 2 :(*8 points*)

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ.
On considère les points *A*, *B* et *C* de coordonnées respectives: $A(1;1;0)$; $B(-1;2;2)$ et $C(-2;1;3)$.

1) *a* – Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   b – Déduire l'aire du triangle *ABC*.
   c – Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2) Soit *P* le plan d'équation : $x + z - 1 = 0$ et Q le plan d'équation : $x - z - 1 = 0$.
   a – Justifier que : $P \perp Q$.
   b – Déterminer une représentation paramétrique de $P \cap Q$.
3) Soit *S* l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$.
   a – Justifier que *S* est une sphère dont on précisera le centre *I* et le rayon *R*.
   b – Démontrer que *S* et *P* sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre *H* et le rayon *r*.

4) Soit a un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.
On considère les points *E*, *F* et *N* de l'espace ξ tels que :
$E(2,0,-1)$; $F(0,0,-1)$ et $N\left(1 + Cos^2 a\ ,\ \sqrt{2} \times Sina \times Cosa\ ,\ -Cos^2 a\right)$
   a – Vérifier que *E* et *F* sont diamétralement opposés sur la sphère *S*.
   b – Calculer $\overrightarrow{NE}.\overrightarrow{NF}$. Que peut on conclure ?
   c – Vérifier que $N \in P$.
   d – Déduire sur quelle ligne varie *N* lorsque a varie.
5) *a* – Montrer que $ON^2 = 1 + 4Cos^2 a$
   b – Pour quelle(s) valeur(s) de a la distance ON^2 est elle minimale ?

Problème :(*8 points*)

I – On considère la fonction f définie sur *IR* par : $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}-1$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (*unité 2cm*).

1) *a* – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$. Interpréter graphiquement.

   b – Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) *a* – Montrer que *f* est dérivable sur *IR* et que pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

   b – Dresser le tableau de variation de *f*.

3) *a* – Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisses 0.

   b – Etudier la position relative de C_f par rapport à *T*.

   c – Tracer T et C_f.

II – Soit la suite (u_n), définie sur *IN* par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{-1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) *a* – Démontrer que, pour tout $n\in IN$, on a $-1\le u_n\le-\dfrac{1}{2}$.

   b – Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) *a* – Montrer que, pour tout $n\in IN$, $u_{n+1}+1\le\dfrac{2}{\sqrt{5}}(1+u_n)$

   b – En déduire que, pour tout $n\in IN$, $u_n+1\le\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$

   c – Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) On considère pour tout $n\in IN$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^k$.

   a – Exprimer S_n en fonction de *n*.

   b – Trouver un encadrement de $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}u_n$